

VYŠETŘOVÁNÍ STABILITY SYSTÉMŮ S ČÁSTMI PRACJÍCÍMI JAK DISKRÉTNĚ, TAK I SPOJITĚ V ČASE

Dalibor Bielek^{1,2}, Zdeněk Kolka³, Viera Biolková³

¹Katedra elektrotechniky; Fakulta vojenských technologií, UO Brno, dalibor.bielek@unob.cz

²Ústav mikroelektroniky; Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno, biolek@feec.vutbr.cz

³Ústav radioelektroniky; Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, VUT Brno, {biolkova, kolka}@feec.vutbr.cz

Abstrakt

V článku je popsán problém s nestabilním chováním diskretních systémů spolupracujících s analogovými bloky. Typickým příkladem jsou konvoluční číslicové filtry ve smyčkách zpětných vazeb s AD a DA převodníky, analogovými antialiasingovými a rekonstrukčními filtry a aplikačními obvody. Je ukázáno, že o stabilitě takovýchto soustav lze v lineárních případech rozhodovat na základě rozložení pólů přidružené přenosové funkce v rovině z , a že toto rozložení závisí jak na algoritmu číslicového filtru, tak i na parametrech analogových bloků a vzorkovacím kmitočtu. Je představena metodologie vyšetřování stability takovýchto systémů lineární i nelineární povahy pomocí simulačních programů typu SPICE.

Klíčová slova: systémy spojité v čase, systémy diskretní v čase, emulátor, memristor.

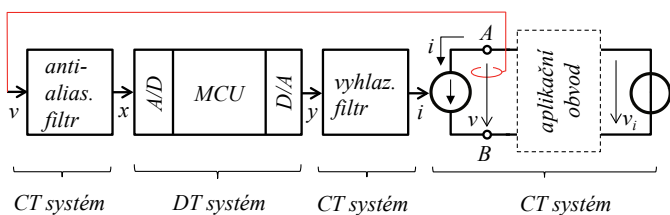
Abstract

Unstable behavior of discrete-time systems cooperating with continuous-time sub-blocks is analyzed. Typical examples are the instabilities in convolution digital filters operating in feedback loops together with AD and DA converters, analog anti-aliasing and smoothing filters, and other application circuits. It is shown that the stability of such systems can, in linear cases, be tested via the location of z -domain poles of an associated transfer function, and that the poles depend not only on the algorithm of digital filter but also on the sampling frequency and the parameters of analog circuitry. A methodology of the stability analysis via the SPICE-family simulation programs is presented.

Keywords: continuous-time systems, discrete-time systems, emulator, memristor.

1 Úvod

V [1] je popsána koncepce hardwarové emulace analogového dvojpólu s principiálně libovolným chováním, které lze definovat programem. Takovýmto způsobem lze emulovat například memristory, jejichž fyzické vzorky jsou dnes obtížně dostupné, či jiné obvodové prvky, jejichž vývoj teprve probíhá. Podle [1] lze mezi svorkami A a B (viz **obr. 1**) emulovat dvojpól pomocí zdroje proudu, řízeného mikrokontrolérem (MCU = *MicroController Unit*) na základě naprogramovaného algoritmu, který k výpočtům využívá napětí snímaného na svorkách A a B. Poznamenejme, že kromě řízeného zdroje proudu jsou v [2] popsány další způsoby emulace řízeným zdrojem napětí a řízeným potenciometrem. Princip je však vždy stejný: řízení prvku zavádí do systému zpětnovazební smyčku, která může vést k nestabilnímu chování. Dynamické vlastnosti této zpětnovazební soustavy jsou určovány bloky, pracujícími diskretně v čase (DT = *Discrete Time*, algoritmus v MCU), diskretně v hodnotách (A/D, D/A, MCU) a spojité v čase (CT = *Continuous Time*, antialiasingový a rekonstrukční filtr, aplikační obvod převádějící proud v napětí).



Obr. 1. Emulátor obecného dvojpólu mezi svorkami A a B jako hybridní DT/CT zpětnovazební systém.

Analýza stability takovýchto soustav není triviální ani v lineárním případě a při neuvažování kvantování hodnot, kdy

DT systém na **obr. 1** lze popsat klasickou přenosovou funkcí v rovině z a analogové filtry a aplikační obvod přenosovými funkcemi v rovině p . Klasické poučky o rozložení pólů v rovinách p a z totiž nelze pro tyto kombinované případy použít.

V části 2 ukážeme a na jednoduchém lineárním příkladu potvrdíme, že testování stability obvodu z **obr. 1** lze převést na test rozložení pólů v rovině z . Teoretickými východisky jsou teorie ekvivalentních signálů [3] a teorie zobecněných přenosových funkcí [4]. V následující části 3 pak představíme numerickou metodu pro testování stability obecných systémů z **obr. 1** v prostředí standardních simulačních programů, které je univerzálně použitelné i pro nelineární úlohy.

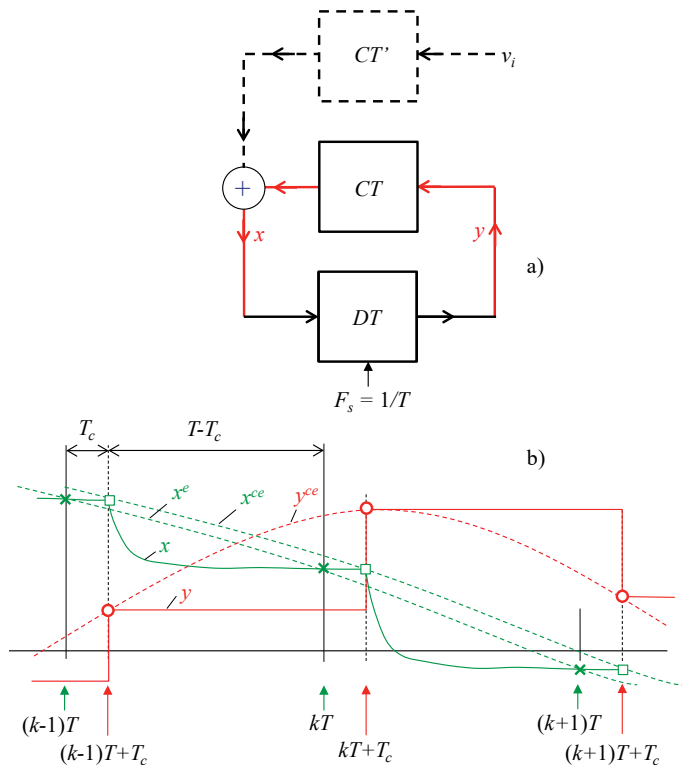
2 Stabilita lineárních DT+CT systémů

Lineární model systému z **obr. 1** pro vyšetřování jeho stability je na **obr. 2 a**). V zpětnovazební smyčce je model lineárního DT systému (MCU bez uvažování kvantování výsledků) a lineární analogový blok CT, reprezentující kaskádu pre- a postfiltrů MCU, řízený zdroj proudu a převod proudu na napětí přes vnitřní impedanci aplikačního obvodu. Blok CT', umístěný vně smyčky, s analýzou stability přímo nesouvisí. Modeluje průnik signálu z budícího zdroje v_i na vstup MCU přes aplikační obvod a antialiasingový filtr.

Předpokládáme, že DT systém používá vzorkovací frekvenci $F_S = 1/T$ a že systém z **obr. 2 a**) je buzen signálem v_i , který vyhovuje podmínce vzorkovacího teorému (v nejjednodušším případě je v_i harmonický signál o frekvenci $F < F_S/2$). Podle diagramu na **obr. 2 b**) dochází v časových okamžicích $\{kT\}$ k vzorkování signálu x , přicházejícího na vstup DT systému, na jehož výstupu se po uplynutí časového intervalu T_C (doba výpočtu výstupního vzorku) skokově změní signál y . Při analýze poměrů v zpětnovazební smyčce je tedy třeba přihlídnout k tomu, že signál vzorkovaný na vstupu bloku DT je zčásti tvořen odezvou CT systému na impulsní průběh,

k jehož změnám dochází s časovým zpožděním T_C oproti okamžikům vzorkování.

Je-li systém z **obr. 2 a)** buzen výše definovaným signálem, pak podle [3] lze diskrétním signálům $\{x(kT)\}$ a $\{y(kT+T_C)\}$ z **obr. 2 b)** přiřadit tzv. ekvivalentní signály spojitého času $x^e(t)$ a $y^e(t)$, které tvoří jejich jakési „hladké obálky“, a které splňují následující dvojici kritérií [4]: 1. Shodují se s diskrétními signály v okamžicích, v němž jsou diskrétní signály definovány. 2. Na frekvenční ose zabírají stejné pásmo jako vstupní signál. Pak lze ekvivalentní signály použít jako jednotnou signálovou reprezentaci pro bloky CT i DT, z čehož se odvine univerzální – zobecněná přenosová funkce (ZPF) jakožto poměr Laplaceových obrazů výstupního a vstupního ekvivalentního signálu bloku [4]. V dalším využijeme aparát ZPF k analýze stability hybridního systému na **obr. 2 a)**.



Obr. 2. a) Zjednodušený model zpětnovazební smyčky obvodu z **obr. 1** pro lineární případ, b) časové průběhy x a y CT systému a odpovídajících ekvivalentních signálů x^e , x^{ce} a y^{ce} .

V zájmu názornosti dalšího výkladu se omezíme na jednoduchý model systému CT ve smyčce zpětné vazby na **obr. 2 a)** ve formě dynamického systému 1. řádu s odezvou na jednotkový skok $h(t)$ a s odezvou na jednotkový počáteční stav na výstupu $g(t)$. K odvození charakteristické rovnice soustavy z **obr. 2 a)** pro vyšetřování stability není třeba uvažovat injekci signálu v_i do smyčky přes systém CT'. Pak pro veličinu x platí rovnice

$$x(kT+T) = g(T-T_C)x(kT+T_C) + h(T-T_C)y(kT+T_C^+), \quad (1)$$

$$x(kT+T+T_C) = g(T)x(kT+T_C) + h(T)y(kT+T_C^+). \quad (2)$$

Horní index + je použit k označení limity zprava v případech, kdy se jedná o bod nespojitosti časového průběhu signálu y .

Dále předpokládáme, že DT systém, realizovaný algoritmem naprogramovaným v MCU, funguje jako konvoluční filtr podle rovnice

$$y(kT+T_C^+) = \sum_{i=0}^n a_i x(kT-iT) + \sum_{i=1}^n b_i y(kT-iT+T_C^+). \quad (3)$$

Podle [4] lze rovnice (1)-(3) přepsat s využitím ekvivalentních signálů z **obr. 2 b)** takto:

$$x^e(t+T) = g(T-T_C)x^{ce}(t+T_C) + h(T-T_C)y^{ce}(t+T_C^+), \quad (4)$$

$$x^{ce}(t+T) = g(T)x^{ce}(t) + h(T)y^{ce}(t), \quad (5)$$

$$y^{ce}(t) = \sum_{i=0}^n a_i x^e(t-iT-T_C) + \sum_{i=1}^n b_i y^{ce}(t-iT). \quad (6)$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na ekvivalentní signály typu $\mathcal{L}\{x^e(t)\} = X^e(p)$ a substitucí $z = \exp(pT)$ dostáváme zápisy rovnic (4)-(6) pomocí zobecněných z -obrazů:

$$X^e = [g(T-T_C)X^{ce} + h(T-T_C)Y^{ce}]z^{T_C/T-1}, \quad (7)$$

$$X^{ce} = \frac{h(T)}{z-g(T)}Y^{ce}, \quad (8)$$

$$Y^{ce} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} z^{-T_C/T} X^e = \frac{N(z)}{D(z)} z^{-T_C/T} X^e. \quad (9)$$

kde $N(z)$ a $D(z)$ jsou číselník a jmenovatel přenosové funkce diskrétního systému DT v rovině z . Po dosazení (8) a (9) do (7) a úpravě dostáváme charakteristickou rovnici systému z **obr. 2 a)** ve tvaru

$$N(z)[g(T-T_C)h(T) + h(T-T_C)(z-g(T))] - zD(z)[z-g(T)] = 0 \quad (10)$$

Výsledek ověříme na příkladu emulace obyčejného rezistoru o odporu R_{emu} principem podle **obr. 1** za předpokladů z [2]: Aplikační obvod obsahuje pouze rezistor R v sérii se zdrojem budicího napětí v_i . Antialiasingový filtr je vyřazen z provozu a rekonstrukční filtr je obyčejná dolní propust 1. řádu o mezním kmitočtu $\omega_0 = 2\pi f_0$ a o přenosové funkci $1/(1+p/\omega_0)$. Ze srovnání **obr. 1 a 2 a)** lze odvodit, že CT filtr ve smyčce zpětné vazby bude mít přenosovou funkci $-R/(1+p/\omega_0)$ a jeho charakteristiky $h(t)$ a $g(t)$ tedy budou $h(t) = -R(1-\exp(-\omega_0 t))$, $g(t) = \exp(-\omega_0 t)$. Protože se emuluje rezistor, algoritmus pro MCU bude jednoduchý: výstup (t.j. proud) je vstup (napětí) lomeno R_{emu} , neboli $N(z)/D(z) = 1/R_{emu}$. S využitím všech těchto údajů je možné charakteristickou rovnici (10) upravit na tvar

$$z^2 + \left[\frac{R}{R_{emu}}(1-\beta) - \alpha \right] + \frac{R}{R_{emu}}(\beta - \alpha) = 0, \quad (11)$$

kde

$$\alpha = e^{-\omega_0 T} = e^{-2\pi f_0 T}, \quad \beta = e^{-\omega_0(T-T_C)} = \alpha^{1-T_C/T}. \quad (12)$$

Z výsledku vyplývá, že koeficienty charakteristické rovnice, z nichž lze usuzovat na stabilitu obvodu, závisí na poměru odporu v aplikačním obvodu a odporu emulovaného rezistoru, na poměru mezního kmitočtu filtru a vzorkovacího kmitočtu, a na poměru doby výpočtu T_C a vzorkovací periody.

V [2] je analyzován případ $T_C \ll T$. Pak $\beta \approx \alpha$ a charakteristická rovnice má dva kořeny z_1 a z_2 :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \alpha - (1 - \alpha) \frac{R}{R_{emu}}. \quad (13)$$

Jednoduchým rozбором dospějeme k podmínce stability

$$\frac{R}{R_{emu}} < \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}, \quad (14)$$

kteřá je v souladu s výsledky v [2]. Emulovaný odpor se tedy musí nacházet nad určitou hranicí, která je určována odporem vnějšího obvodu a parametry vyhlazovacího filtru, jak je ilustrováno v **tabulce 1**.

Tab. 1. Podmínky stability pro různé mezní kmitočty vyhlazovacího filtru.

f_o/f_s	podmínka stability
0,1	$R < 3,287 R_{emu}$
0,5	$R < 1,090 R_{emu}$
1	$R < 1,004 R_{emu}$
10	$R < R_{emu}$
∞ (bez filtrace)	$R < R_{emu}$

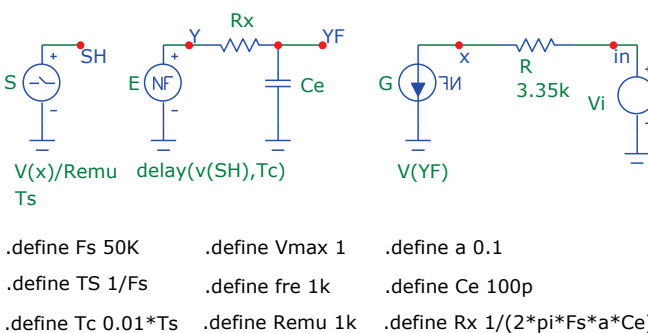
3. Testování stability s využitím simulačního programu

Z rozboru v části 2 vyplývá, že testování stability hybridních CT-DT systémů z rozložení pólů v rovině z může být poměrně náročné i při uvažování řady zjednodušujících podmínek. Pro případy spojitých systémů vyšších řádů v zpětnovazební smyčce je navíc zapotřebí používat vektorový zápis rovnic dynamiky a analytické odvozování charakteristické rovnice je pak prakticky nemožné. Schůdnou cestou je pak implementace dané metody do konvenčních simulačních programů (např. třídy SPICE), případně do programů pro vědeckotechnické výpočty (např. MATLABu). O stabilitě lze pak rozhodnout transientní analýzou. Takovýto přístup umožňuje i analýzu nelineárních systémů a lze modelovat i vliv kvantování hodnot [5].

Na **obr. 3** je ukázka modelu pro transientní analýzu v Micro-Capu. Obvod Sample-Hold (S) vzorkuje napětí emulované brány (uzel x) a počítá proud branou (napětí dělí hodnotou Remu). Zdroj E provádí časové zpoždění o čas T_c a modeluje tak dobu výpočtu. Následující článek RxCe je modelem vyhlazovacího filtru. Odpor Rx se počítá z parametru a (poměr mezní a spínací frekvence z **tab. 1** a kapacity Ce. Výstupní napětí filtru je číselně rovno proudu, který se nastavuje zdrojem G.

Výsledky analýzy jsou na **obr. 4** jak pro stabilní, tak i nestabilní případ emulace rezistoru o $R_{emu} = 1 \text{ k}\Omega$ a jsou plně v souladu s 1. řádkem z **tab. 1**. V prvním případě je odpor $R = 2 \text{ k}\Omega$ menší než $3,287 \text{ k}\Omega$ a zapojení je stabilní. V druhém

případě velikost odporu překročila danou mez a emulátor je nestabilní.



Obr. 3. Model pro testování stability obvodu z **obr. 1 a 2 a** v Micro-Capu.

4. Závěry

V článku je ukázáno, že teoretickým východiskem pro testování stability lineárních dynamických DT-CT systémů může být koncept ekvivalentních signálů a zobecněných přenosových funkcí. K praktickému testování složitých systémů obecně nelineární povahy je vhodné využít transientní analýzy modelů těchto systémů, při jejichž vytváření je možné zohlednit řadu faktorů, které mohou mít vliv na (ne)stabilní chování, jako jsou třeba zaokrouhlovací chyby v digitálních subblocích.

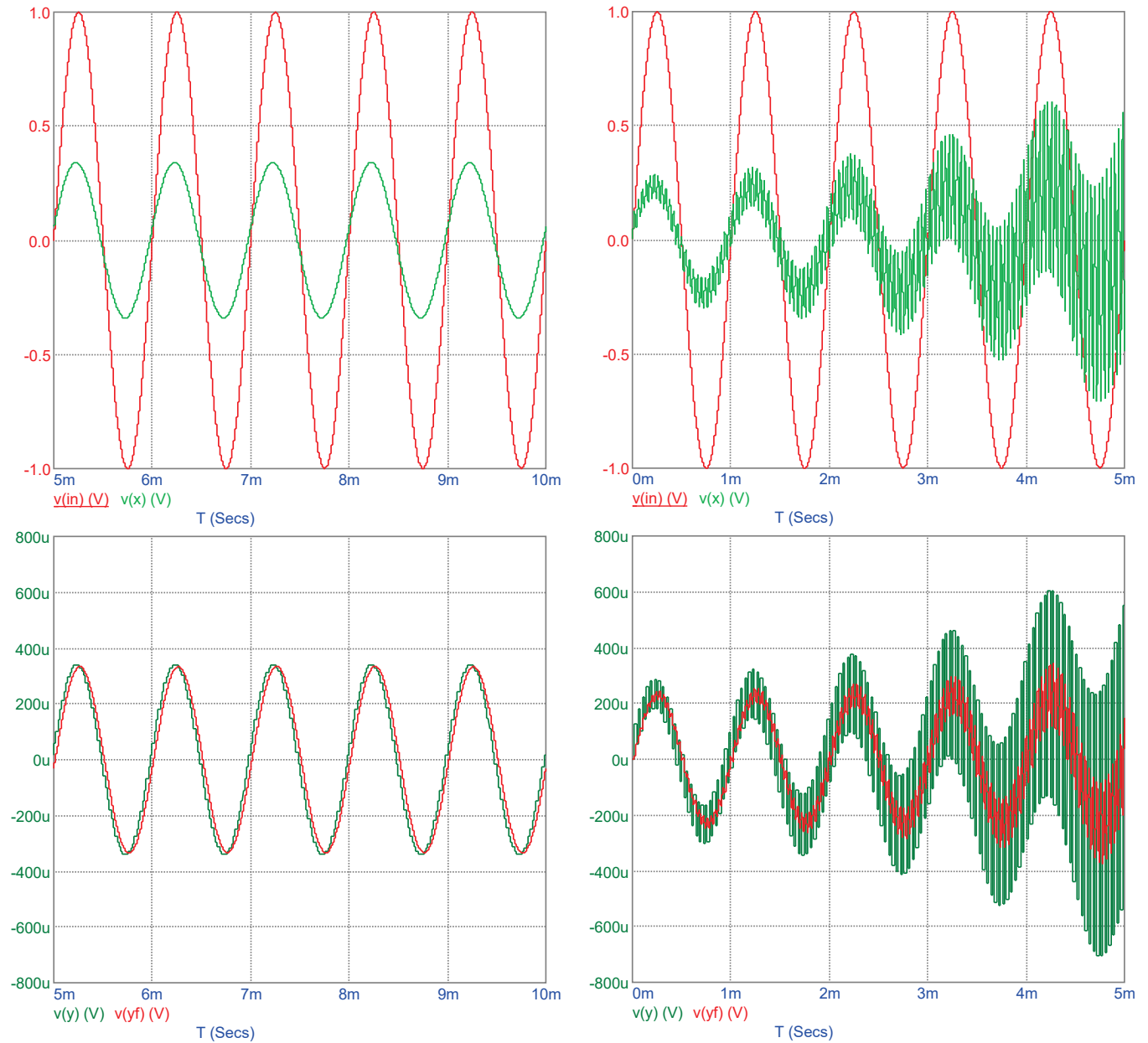
Experimenty s numerickými simulacemi ukázaly, že při testování stability hraje roli přesnost výpočtů, zejména pokud se týká metod numerické integrace. Variabilní integrační krok, který je v simulátorech typu SPICE běžně využíván k zefektivnění transientní analýzy, může paradoxně do jisté míry znehodnocovat výsledky testování systémů, které z principu využívají fixní vzorkovací periodu. Proto je výhodné k softwarovým experimentům využít programy, které umožňují volbu fixního integračního kroku, jako je například Micro-Cap, a přesnost simulace dosahovat postupným snižováním délky kroku.

Poděkování

Článek vznikl za podpory COST Action IC1401 financovaného MŠMT pod projektem číslo LD15033. K řešení bylo využito infrastruktury K217 UO v Brně.

Literatura

- [1] Kolka, Z., Biolek, D., Biolková, V. Hybrid modelling and emulation of mem-systems. *Int. J. Numer. Modelling*, vol. 25, no. 3, 2012, p. 216-225.
- [2] Kolka, Z., Biolková, V., Biolek, D. Stability of digitally emulated mem-elements. In *Proc. ICCCS*, Pamplemousses, Mauritius, 2015, p. 1-5.
- [3] Tsividis, Y. Representation of sampled-data signals as functions of continuous time. *Proc. IEEE*, vol. 71, 1983, p. 181-183.
- [4] Biolek, D. Modeling of periodically switched networks by mixed s-z description. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, vol. 44, no. 8, 1997, p. 750-758.
- [5] Kolka, Z., Biolková, V., Biolek, D. On hybrid emulation of mem-systems. In *Proc. EMS*, Pisa, 2014, p. 490-494.



Obr. 4. Tranzientní analýza modelu z obr. 3 pro $R = 2 \text{ k}\Omega$ (vlevo, stabilní chování) a $R = 3,35 \text{ k}\Omega$ (vpravo, nestabilita).