DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE EXTENDED MEMRISTORU SE SKALÁRNÍM STAVEM

Zdeněk Biolek

Ústav mikroelektroniky; Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií VUT v Brně, zdenek.biolek@gmail.com

Abstrakt

Extended memristor je nový název pro memristivní systém, tj. pro nelineární rezistor, který je závislý na stavu přidruženého dynamického systému. Tento jednobran je charakterizován portovou rovnicí ve tvaru Ohmova zákona a stavovou rovnicí, která popisuje jeho dynamiku. Stejně dobře popisuje chování *extended* memristoru jeho diferenciální rovnice (DE), do které vstupují výlučně okamžité hodnoty jeho napětí, proudu a jejich derivací jako funkce času. Článek obsahuje odvození obecného tvaru DE pro libovolný *extended* memristor se skalárním stavem a ukazuje, že jde vždy o nelineární rovnici 1. řádu. Jsou odvozeny tvary DE pro hyperbolický model HP memristoru s Joglekarovou okénkovou funkcí a také pro některé zástupce generických memristorů.

Klíčová slova: *extended* memristor, generický memristor, diferenciální rovnice.

Abstract

Extended memristor newly denotes a memristive system, i.e. nonlinear resistor whose resistance depends on the state of associated dynamical system. This one-port element has a port equation in the form of Ohm's law and a state equation describing its dynamics. An alternative model of the extended memristor is its differential equation (DE), which is compounded exclusively of the instantaneous voltage, current, and their derivatives as functions of time. The paper contains a derivation of general form of the DE for an arbitrary extended memristor with scalar state, showing that it is always a nonlinear first-order DE. The forms of the DE are derived for the hyperbolic model of the HP memristor with Joglekar window function and also for several representatives of generic memristors.

Keywords: extended memristor, generic memristor, differential equation.

1 Úvod

Memristor byl původně definován v [1] jako rezistor, jehož okamžitý odpor je závislý na celkové velikosti prošlého náboje $q=\int idt$, resp. toku $\varphi=\int vdt$, i je proud a v je svorkové napětí. Platí pro něj tedy vzájemně duální podoby Ohmova zákona

$$v=R_M\left(q\right)i\,,\; i=G_M\left(\varphi\right)v\,, \tag{1}$$

kde R_M, resp. G_M je diferenciální memristance, resp. memduktance.

Memristor je paměťovým rezistorem, neboť poté, co jím přestane protékat proud, si „pamatuje“ hodnotu odporu, kterou nastřádal integrací tohoto proudu, resp. přiloženého napětí. Jako základní prvek elektrotechniky zůstal dlouho pouze hypotetickým prvkem, který zaručuje symetrii vazeb mezi napětím, proudem, tokem a nábojem. V roce 1976 bylo rozeznáno [2], že memristor je speciálním případem hojně se vyskytujících tzv. memristivních systémů neboli nelineárních rezistorů závislých na obecně vektorovém stavu přidruženého dynamického systému. Platí zde dvě vzájemně duální podoby Ohmova zákona

$$v=R_M\left(\boldsymbol{x},i\right)i\,,\text{ resp. } i=G_M\left(\boldsymbol{x},v\right)v\,, \tag{2}$$

kde vektor stavu $\boldsymbol{x}$ je řešením pohybové stavové rovnice

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x},i\right),\text{ resp. } \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x},v\right). \tag{3}$$

Dnes se memristivní systémy považují za *extended* memristory [3]. Ideální memristor (1) je speciálním případem *extended* memristoru pro $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},i)=i$, resp. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},v)=v$. Na půli cesty mezi ideálními memristory a *extended* memristory se nachází třída tzv. generických memristorů [3], které se od *extended* memristorů liší pouze v portové rovnici

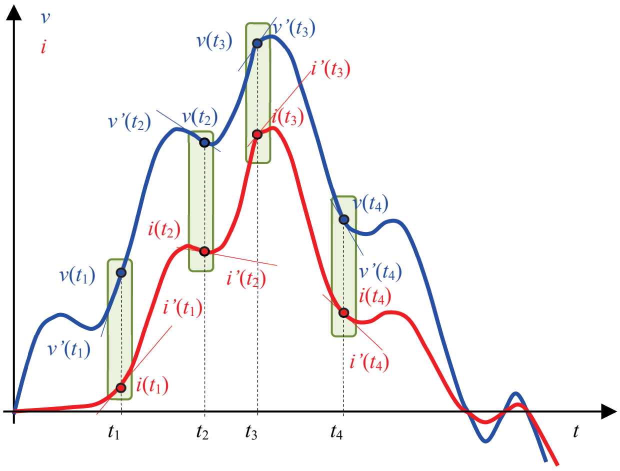
$$v=R_M\left(\boldsymbol{x}\right)i\,,\text{ resp. } i=G_M\left(\boldsymbol{x}\right)v\,, \tag{4}$$

tj. ve skutečnosti se jedná o lineární stavově závislé rezistory. Podle terminologie zavedené v [3] rozlišujeme ještě tzv. ideální generické memristory, což jsou generické memristory (4) se skalárním stavem x. Ideálními generickými memristory jsou např. termistor nebo žárovka jakožto prvky, jejichž odpor závisí na jejich okamžitém teplotním stavu.

V práci [4] je ukázáno, že pro každý ideální memristor (1) v libovolném okamžiku platí obecně nelineární relace typu

$$f\left(i,v,\frac{di}{dt},\frac{dv}{dt}\right)=0\,, \tag{5}$$

kde $v(t)$ je napětí na memristoru a $i(t)$ je proud, který jím protéká. Situace je znázorněna na **obr. 1**.



Obr. 1. Okamžité napětí v a proud i ideálního memristoru a jejich první časové derivace v' a i' jsou za všech okolností vázány relací $f(v,i,v',i')=0$.

Okamžité hodnoty napětí, proudu a jejich derivací nejsou na sobě nezávislé, nýbrž jsou mezi sebou vázány relací (5). V praxi to znamená, že budíme-li libovolný ideální memristor např. napětím o známém průběhu $v(t)$, pak proud $i(t)$ musí být řešením obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, jejíž tvar přímo vyplývá z relace (5). Analogický závěr platí samozřejmě pro napětí memristoru buzeného předem známým proudovým signálem. V [4] jsou rozebrány případy, kdy napětí nebo proud jsou řešením lineární, Bernoulliovy a Riccatiovy diferenciální rovnice, Abelovy rovnice 1. druhu nebo diferenciální rovnice zcela jiného typu.

Typ diferenciální rovnice může dát odpověď na otázku analytické řešitelnosti odezvy memristoru na předem dané buzení. Nalezení relace (5) také může být dobrým východiskem pro sestavení modelu prvku.

Tato práce rozšiřuje výsledky [4] na obecnější druhy memristorů. Druhá část práce přináší důkaz, že relace (5) platí pro každý *extended* memristor se skalárním stavem a tudíž i pro každý *ideální generický* memristor, a je odvozen její obecný tvar pro prvek zadaný rovnicemi typu (2) a (3). Tyto obecné výsledky jsou nejprve aplikovány na konkrétní typy ideálních generických memristorů. Část třetí je věnována hyperbolickému modelu HP memristoru, který je jedním z představitelů *extended* memristoru. Části 4 až 6 se věnují představitelům generických memristorů. Část čtvrtá pojednává o teplotně závislých rezistivních prvcích jako jsou žárovka, termistor a vodič, který se zahřívá procházejícím proudem. V páté části se rozebírá případ PTC termistoru a 6. část odvozuje diferenciální rovnice elektrického vodiče.

2 Obecný tvar diferenciální rovnice *extended* memristoru se skalárním stavem

Uvažujme *extended* memristor daný rovnicemi (2) a (3), ve kterých je x skalárním stavem. Aktuální pracovní bod prvku se pohybuje po ploše, která je geometrickým znázorněním memristance $R_M = R_M(x,i)$, resp. memduktance $G_M = G_M(x,v)$ jako funkce dvou proměnných. Pro ilustraci je na **obr. 2** vykreslena odpovídající plocha pro memduktanci HP memristoru zastoupeného hyperbolickým modelem [5]

$$G_M(x,v) = s\frac{x^n\beta\sinh(\alpha v)+\chi(\exp(\gamma v)-1)}{v}. \tag{6}$$

Stav x je číslo mezi 0 a 1 udávající okamžitou polohu rozhraní mezi vodivou a nevodivou vrstvou memristoru, které je nositelem paměťového efektu.

Dynamika memristoru je dána pohybovou rovnicí (3), díky které zastupující pracovní bod vykresluje na ploše $R_M = R_M(x,i)$, resp. $G_M = G_M(x,v)$ specifickou trajektorii. Měnící se stav x a proud i, resp. napětí v způsobují, že se memristance, resp. memduktance mění v čase. Pro časovou derivaci memristance platí

$$\frac{dR_M(x,i)}{dt} = \frac{\partial R_M(x,i)}{\partial x}f(x,i)+\frac{\partial R_M(x,i)}{\partial i}\frac{di}{dt}. \tag{7}$$

Nyní vyjádříme obě strany rovnice (7) výhradně pomocí okamžitých hodnot napětí, proudu a jejich prvních derivací. Levou stranu takto upravíme snadno s využitím toho, že $R_M = v/i$. Po jednoduché úpravě obdržíme

$$\frac{\partial R_M(x,i)}{\partial x}f(x,i)i^2+\frac{\partial R_M(x,i)}{\partial i}\frac{di}{dt}i^2-i\frac{dv}{dt}+v\frac{di}{dt}=0. \tag{8}$$

Úseky trajektorie na ploše $R_M = R_M(x,i)$, na kterých je parciální derivace $\partial R_M/\partial x$ různá od nuly, se musí řídit diferenciální rovnicí typu (5). Podle věty o implicitní funkci [6] totiž na těchto úsecích existuje explicitní závislost $x = x(R_M,i)$ neboli $x = x(v/i,i)$ a rovnici (8) lze vyjádřit ve tvaru

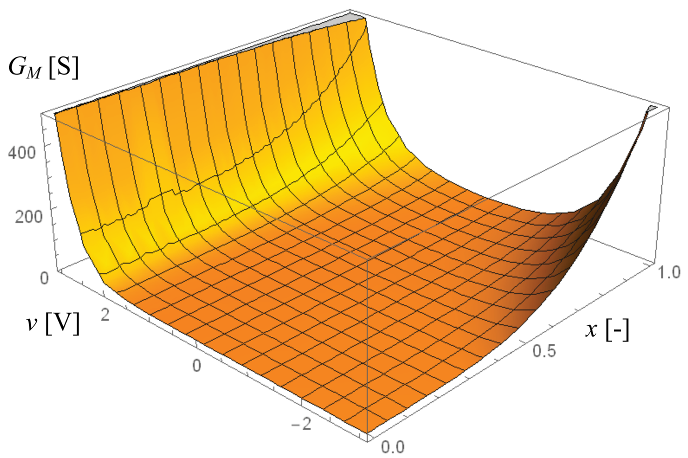
$$A(v,i)i^2+B(v,i)\frac{di}{dt}i^2-i\frac{dv}{dt}+v\frac{di}{dt}=0, \tag{9}$$

kde obě funkce

$$A(v,i)=\left[\frac{\partial R_M(x,i)}{\partial x}f(x,i)\right]_{x=x\left(\frac{v}{i},i\right)},$$

$$B(v,i)=\left[\frac{\partial R_M(x,i)}{\partial i}\right]_{x=x\left(\frac{v}{i},i\right)} \tag{10}$$

jsou po substituci $x = x(v/i,i)$ funkcemi okamžitých hodnot napětí a proudu.



Obr. 2. Geometrický význam memduktance dané vztahem (6) s parametry $s = 1$ A, $n = 4$, $\alpha = 2$ V^{-1}, $\beta = 9$, $\gamma = 4$ V^{-1}, $\chi = 0{,}01$. Okamžité hodnoty napětí v, stavu x a memduktance G_M jsou spolu vázány tak, že pracovní bod se pohybuje výlučně po vyznačené ploše.

Existuje také duální protějšek k obecnému tvaru rovnice (9)

$$C(v,i)v^2+D(v,i)\frac{dv}{dt}v^2-v\frac{di}{dt}+i\frac{dv}{dt}=0, \tag{11}$$

kde

$$C(v,i)=\left[\frac{\partial G_M(x,v)}{\partial x}g(x,v)\right]_{x=x\left(\frac{i}{v},v\right)},$$

$$D(v,i)=\left[\frac{\partial G_M(x,v)}{\partial v}\right]_{x=x\left(\frac{i}{v},v\right)}. \tag{12}$$

Rovnice (9), resp. (11) představuje obecný formát DE libovolného *extended* memristoru se skalárním stavem. Jak napětí, tak proud na takovém memristoru jsou vždy řešením nelineární DE prvního řádu. Z rovnic vyplývá, že je-li neznámou veličinou napětí, jde obecně o DE jiného typu než v případě, kdy je neznámou veličinou proud.

3 Diferenciální rovnice hyperbolického modelu HP memristoru

V [5] je diskutován hyperbolický model HP memristoru zastoupený portovou rovnicí (6), jehož dynamika je dána stavovou rovnicí (3) s funkcí

$$g\left(x,v\right)=av^{q}F\left(x\right), \tag{13}$$

kde a a q jsou reálná čísla a $F(x)$ je tzv. okénková funkce pro modelování nelinearit poblíž okrajů memristoru. V [5] je zvolena Joglekarova okénková funkce [7]

$$F\left(x\right)=1-\left(1-2x\right)^{2p}, \tag{14}$$

kde p je kladný celočíselný exponent. Z (6) lze snadno zjistit explicitní závislost $x = x(i/v,v)$

$$x=\sqrt[n]{\frac{s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}, \tag{15}$$

takže funkce (12) pro tento *extended* memristor budou mít tvar

$$\begin{gathered}C\left(v,i\right)=nav^{q-1}\sqrt[n]{\frac{\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)^{n-1}}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}\times\\ \times\left(1-\left(1-2\sqrt[n]{\frac{s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}\right)^{2p}\right),\end{gathered} \tag{16a}$$

$$\begin{gathered}D\left(v,i\right)=\\ =\frac{\alpha\coth\left(\alpha v\right)\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)+\chi\gamma\exp\left(\gamma v\right)}{v}-\frac{i}{v^{2}}.\end{gathered} \tag{16b}$$

Výsledná diferenciální rovnice je

$$\begin{gathered}nav^{q-1}\sqrt[n]{\frac{\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)^{n-1}}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}\times\\ \times\left(1-\left(1-2\sqrt[n]{\frac{s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}\right)^{2p}\right)+\\ +\left[\alpha\coth\left(\alpha v\right)\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)+\chi\gamma\exp\left(\gamma v\right)\right]\frac{dv}{dt}-\\ -\frac{di}{dt}=0.\end{gathered} \tag{17}$$

V situacích, ve kterých bychom se při popisu memristoru obešli bez okénkové funkce $F(x)$, diferenciální rovnice (17) se zjednoduší na tvar

$$\begin{gathered}nav^{q}\sqrt[n]{\frac{\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)^{n-1}}{\beta\sinh\left(\alpha v\right)}}+[\alpha\coth(\alpha v)\times\\ \times\left(s^{-1}i-\chi\left(\exp\left(\gamma v\right)-1\right)\right)+\chi\gamma\exp\left(\gamma v\right)]\frac{dv}{dt}-\frac{di}{dt}=0.\end{gathered} \tag{18}$$

Diferenciální rovnice (17) a (18) jsou příliš komplikované na to, aby bylo k dispozici jejich řešení pomocí standardních funkcí.

4 Diferenciální rovnice teplotně závislých rezistivních prvků

Na memristivní povahu prvků s teplotně závislým odporem upozornila již klasická práce [2], která identifikovala např. termistor jako memristivní systém. Zcela obecně platí, že u prvků s teplotně závislým odporem přebírá úlohu stavové veličiny teplota. Při popisu dynamiky takových jednobranů vycházíme z rovnice výkonové rovnováhy [8]

$$\begin{gathered}p\left(t\right)=v\left(t\right)i\left(t\right)=R\left(T\right)i^{2}\left(t\right)=\\ =C_{T}\frac{dT}{dt}+\frac{T-T_{amb}}{R_{T}}+k\left(T^{4}-T_{amb}^{4}\right),\end{gathered} \tag{19}$$

kde $p(t)$ je dodávaný elektrický výkon, C_T a R_T jsou tepelná kapacita prvku a tepelný odpor mezi prvkem a okolím, T a T_{amb} jsou teplota prvku a okolní teplota, k je konstanta vyjadřující schopnost prvku vyzařovat teplo do okolí, jak je tomu např. u žárovky. Teplotně závislý rezistor $R(T)$ je tedy dle definice (3) a (4) generickým memristorem se skalárním stavem T, který se řídí pohybovou rovnicí typu (3)

$$\frac{dT}{dt}=f\left(T,i\right)=\frac{1}{C_{T}}\left[R\left(T\right)i^{2}-\frac{T-T_{amb}}{R_{T}}-k\left(T^{4}-T_{amb}^{4}\right)\right]. \tag{20}$$

Některé příklady teplotně závislých rezistivních prvků, které mohou být studovány jako generické memristory, jsou uvedeny v **tab. 1**.

Tab. 1. Termistory, žárovka a elektrický vodič jako generické memristory, R_{nom} je odpor při nominální teplotě T_{nom}.

***R*(*T*)**	***T*(*v*/*i*), *DE***
termistor PTC $R_{nom}\exp[\beta_p(T-T_{nom})]$	$T\left(\frac{v}{i}\right)=\frac{1}{\beta_p}\ln\left(\frac{v}{iR_{nom}}\right)+T_{nom}$ $\frac{\beta_p}{C_T}\left(vi-\frac{T\left(\frac{v}{i}\right)-T_{amb}}{R_{\vert T}}\right)vi-\frac{dv}{dt}i+\frac{di}{dt}v=0$
termistor NTC $R_{nom}\exp[\beta_n(1/T-1/T_{nom})]$	$T\left(\frac{v}{i}\right)=\left[\frac{1}{\beta_n}\ln\left(\frac{v}{iR_{nom}}\right)+\frac{1}{T_{nom}}\right]^{-1}$ $\frac{\beta_n}{C_T T^2\left(\frac{v}{i}\right)}\left(\frac{T\left(\frac{v}{i}\right)-T_{amb}}{R_{\vert T}}-vi\right)vi-\frac{dv}{dt}i+\frac{di}{dt}v=0$
žárovka, el. vodič $R_{nom}\,[1+\alpha(T-T_{nom})+$ $+\beta(T-T_{nom})^2]$	$T\left(\frac{v}{i}\right)=\frac{\alpha}{2\beta}\left[\sqrt{1+\frac{4\beta}{\alpha^2}\left(\frac{v}{iR_{nom}}-1\right)}-1\right]$ $\frac{R_{nom}}{C_T}\left(\alpha+2\beta\left(T\left(\frac{v}{i}\right)-T_{amb}\right)\right)\left(vi-kT^4\left(\frac{v}{i}\right)+kT_{amb}^4\right.$ $\left.-\frac{T\left(\frac{v}{i}\right)-T_{amb}}{R_T}\right)i^2-\frac{dv}{dt}i+\frac{di}{dt}v=0$

Levý sloupec **tab. 1** ukazuje závislost odporu na teplotě, pravý sloupec inverzní závislost umožňující vypočítat okamžitou hodnotu teploty z okamžité hodnoty odporu a tvar diferenciální rovnice. K uvedeným vztahům se dospělo aplikací vzorců (9) a (10) na konkrétní tvary $R(T)$ dle **tab. 1** a $f(T,i)$ podle (20). Funkce $B(v,i)$ z (10) je u generických memristorů identicky nulová.

Rovnici (20), kterou se řídí časový průběh teploty, lze přepsat do tvaru

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{C_T}T^4 - \frac{1}{R_T C_T}T + \frac{p(t)}{C_T} + \frac{T_{amb}}{R_T C_T} + \frac{kT_{amb}^4}{C_T}, \tag{21}$$

což je Chiniho diferenciální rovnice, která není pro obecně zadané výkonové buzení $p(t)$ analyticky řešitelná [9]. V situacích, kdy lze zanedbat ztrátu dodávaného výkonu radiací (např. provoz prvku mimo rozsah extrémních teplot), přechází rovnice (21) vlivem $k = 0$ v nehomogenní lineární diferenciální rovnici, jejíž řešení je

$$T(t) = T_{amb} + \left(T(0) - T_{amb}\right)e^{-\frac{t}{R_T C_T}} + \frac{1}{C_T}\int_0^t p(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{R_T C_T}}d\tau, \tag{22}$$

kde $T(0)$ je teplota v čase $t = 0$. Dosazením (22) do vztahu $R(T)$ obdržíme pro konkrétní prvek z **tab. 1** analytický vztah pro časový průběh rezistance v závislosti na dodávaném výkonu.

V následující části přinášíme ukázku, jak aplikovat dosavadní postupy na případ PTC termistoru.

5 PTC termistor

S uvážením konkrétního tvaru $T(v/i)$ pro PTC termistor dle **tab. 1** vyjde jeho diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{\beta_p}{C_T}v^2 i^2 - \frac{1}{R_T C_T}vi\ln\left(\frac{v}{iR_{amb}}\right) - \frac{dv}{dt}i + \frac{di}{dt}v = 0 \cdot \tag{23}$$

Rovnice (23) nemá řešení v rámci standardních funkcí.

Dosazením (22) do vztahu $R(T)$ pro PTC termistor obdržíme pro časový vývoj odporu

$$R(t) = R_{amb}\left(\frac{R(0)}{R_{amb}}\right)^{e^{-\frac{t}{R_T C_T}}} e^{\frac{\beta_p}{C_T}\int_0^t p(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{R_T C_T}}d\tau}, \tag{24}$$

kde $R(0)$ je odpor termistoru v čase $t = 0$ a R_{amb} je odpor termistoru bez buzení, jehož teplota je ustálena na teplotě okolí. Z (24) lze dobře vidět skutečnost, že PTC termistor je volatilním prvkem. Pokud totiž v libovolném okamžiku $t=t_{off}$ přerušíme jeho napájení, t.j. $p(t) = 0$ pro $t > t_{off}$, jeho odpor se bude nadále měnit dle vztahu

$$R(t) = R_{amb}\left(\frac{R(t_{off})}{R_{amb}}\right)^{e^{-\frac{t-t_{off}}{R_T C_T}}}, \tag{25}$$

tj. odpor se bude měnit tak dlouho, dokud se teplotní stav prvku neztotožní s teplotním stavem okolí.

Jelikož časový vývoj teploty T dle (22) a tím i rezistance $R(T)$ závisí výhradně na dodávaném výkonu $p(t)$, při buzení prvku bipolárním průběhem napětí či proudu musejí vznikat v rovině v-i hysterezní smyčky typu II [10].

6 Elektrický vodič

Vyloučíme-li ztráty způsobené vyzařováním, t.j. $k = 0$, a zanedbáme kvadratický člen v závislosti $R(T)$, tj. $\beta = 0$, vyjde diferenciální rovnice elektrického vodiče dle t**ab. 1** ve tvaru

$$\frac{\alpha R_{nom}}{C_T}vi^3 + R_{nom}\frac{1-\alpha\left(T_{nom} - T_{amb}\right)}{R_T C_T}i^2 - \frac{1}{R_T C_T}vi - \\ -\frac{dv}{dt}i + \frac{di}{dt}v = 0. \tag{26}$$

Je-li znám časový průběh budicího proudu $i(t)$, je rovnice (26) vzhledem k neznámému napětí $v(t)$ lineární diferenciální rovnicí s časově proměnnými parametry, která je řešitelná analyticky. Naopak pro známé napěťové buzení $v(t)$ se (26) stává vzhledem k neznámému proudu $i(t)$ Abelovou diferenciální rovnicí 1. druhu [4], jejíž analytické řešení je rovněž známo [11].

7 Závěr

Článek zobecňuje poznatky z [4] o diferenciálních rovnicích ideálních memristorů na *extended* memristory se skalárním stavem. Je ukázáno, že diferenciální rovnice, jíž vyhovují napětí a proudy za zcela libovolných podmínek buzení těchto prvků, je vždy obyčejná diferenciální rovnice (ODE) 1. řádu. Vzhledem k tomu, že zastoupení těchto prvků v reálném světě je značné bez ohledu na jejich fyzikální podstatu, může být tento závěr překvapující. Složitost diferenciální rovnice většinou neumožňuje její přímé analytické řešení, avšak tam, kde je to možné, jde o příjemný bonus, např. u tepelně závislých prvků typu žárovka, termistor nebo elektrický vodič.

Poděkování

Článek vznikl za podpory COST Action IC1401 financovaného MŠMT pod projektem číslo LD15033.

Literatura

[1] Chua, L. O. Memristor – The missing circuit element. *IEEE Trans. Circuit Theory*, 1971, vol. CT-18, no. 5, pp. 507–519.

[2] Chua, L. O., Kang, S. M. Memristive Devices and Systems. *Proc. of the IEEE*, 1976, vol. 64, no. 2, pp. 209-223.

[3] Chua, L. O. If it's pinched it's a memristor. *Semiconductor Science and Technology*, 2014, vol. 29, no. 10, pp. 1-42.

[4] Biolek, Z., Biolek, D., Biolková, V. Differential equations of ideal memristors. *Radioengineering*, 2015, vol. 24, no. 2, pp. 369-377.

[5] Lehtonen, E., Laiho, M. CNN Using Memristors for Neighborhood Connections. *12th International Workshop on Cellular Nanoscale Networks and Their Applications (CNNA)*, 2010, pp. 1-4.

[6] Fleming, W. H. Functions of Several Variables. *Undergraduate Texts in Mathematics*, 1977, Springer-Verlag New York, pp. 412.

[7] Joglekar, Y. N., Wolf, S. J. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits. *European Journal of Physics*, 2009, vol. 30, no. 4, pp. 661-675.

[8] Clauss, D. A., Ralich, R. M, Ramsier, R. D. Hysteresis in a light bulb: connecting electricity and thermos-dynamics with simple experiments and simulations. *European Journal of Physics*, 2001, vol. 22, no. 4, pp. 385-394.

[9] Kamke, E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. *Akademische Verlagsgesellschaft*, 1942, Leipzig, pp. 642.

[10] Pershin, Y. V., Di Ventra, M. Memory effects in complex materials and nanoscale systems. *Advances in Physics*, 2011, vol. 60, no. 4, pp. 145-227.

[11] Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F. Handbook of exact Solutions for ordinary differential equations. *Chapman & Hall/CRC Press*, 2002, Boca Raton London New York Washington, D.C., pp. 816.